Lumo Skript

Statistik I — Deskriptive Statistik, Wahrscheinlichkeitsrechnung, Zufallsvariablen & Verteilungsmodelle

Kapitel 1: Wahrscheinlichkeitsrechnung

Die Wahrscheinlichkeitsrechnung liefert das Fundament, um Unsicherheit zu quantifizieren. Sie bildet hier den Einstieg und legt die Grundlage für die Zufallsvariablen im nächsten Kapitel (was könnte theoretisch passieren) — später greifen auch die Verteilungsmodelle und die deskriptive Statistik immer wieder auf diese Grundbegriffe zurück.

1.1 Zufallsexperiment und Ergebnisraum

Ein Zufallsexperiment ist ein Vorgang, dessen Ergebnis nicht sicher vorhersagbar ist, der aber unter denselben Bedingungen beliebig oft wiederholbar wäre, z. B. ein Würfelwurf oder eine Klausur.

Ergebnisraum ©
Enthält alle möglichen, sich gegenseitig ausschließenden Ausgänge, z. B. beim Würfeln $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$.

Elementarereignis
Ein einzelnes Ergebnis aus Ω, z. B. die gewürfelte Zahl 4.

1.2 Ereignisse und Mengenoperationen

Ein Ereignis A ist eine Teilmenge von Ω und tritt ein, wenn das tatsächliche Ergebnis in dieser Teilmenge liegt.

Vereinigung AB
A oder B oder beide treten ein.

Schnitt AB
A und B treten beide ein.

Komplement
A tritt nicht ein (Ω ohne A).

Disjunkt
$A \cap B =$ — A und B können nicht gleichzeitig eintreten.

Fast jeder Fehler bei Wahrscheinlichkeitsaufgaben lässt sich vermeiden, indem man sich zuerst sauber überlegt, welche Menge genau gemeint ist, bevor man rechnet.

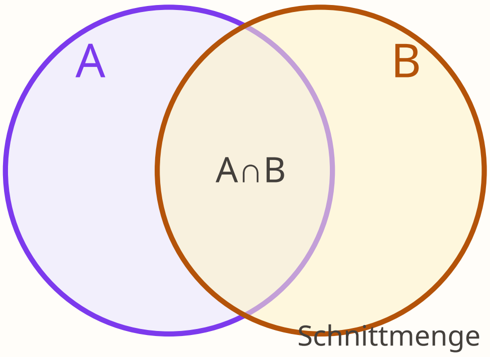

Abb. 1.1 — Venn-Diagramm: die Schnittmenge A∩B wird beim Additionssatz nur einmal gezählt.

> Beispiel: Zwei Würfel: A = Augensumme ist gerade, B = mindestens eine 6. A∩B = Augensumme gerade und mindestens eine 6, z. B. (6,2), (6,4), (6,6).

1.3 Wahrscheinlichkeitsbegriffe

Es gibt drei unterschiedliche Zugänge, was Wahrscheinlichkeit überhaupt bedeutet. In der Klausur wird gerne gefragt, welcher Begriff in einer konkreten Situation zutrifft.

Laplace-Wahrscheinlichkeit
P(A) = günstige Fälle / mögliche Fälle. Setzt gleichwahrscheinliche Elementarereignisse voraus, z. B. einen fairen Würfel.

Statistische Wahrscheinlichkeit
Nähert P(A) durch die relative Häufigkeit bei sehr vielen Wiederholungen an. Funktioniert auch bei nicht gleichwahrscheinlichen Ausgängen.

Axiomatische Wahrscheinlichkeit (Kolmogorov)
Definiert Wahrscheinlichkeit rein formal über drei Axiome: $P(A)\geq 0$, $P(\Omega)=1$, und Additivität für disjunkte Ereignisse.

1.4 Kombinatorik: Permutation und Variation

Kombinatorik zählt, wie viele Möglichkeiten es für eine Auswahl oder Anordnung gibt. Die zentrale Frage: Kommt es auf die Reihenfolge an, und ist Wiederholung erlaubt?

Permutation
Anordnungen von n unterscheidbaren Objekten in einer Reihe: n! Möglichkeiten.

Variation
Geordnete Auswahl von k aus n Objekten. Mit Wiederholung: n^k. Ohne Wiederholung: $n!/(n-k)!$.

Variation ohne Wiederholung: $n! / (n-k)!$

> Beispiel: 5 Personen in einer Schlange: $5! = 120$ Reihenfolgen. Ein 4-stelliger PIN aus Ziffern 0–9 mit Wiederholung: 10^4.

1.5 Kombinatorik: Kombination

Kombinationen zählen ungeordnete Auswahlen — die Reihenfolge zählt hier nicht.

Kombination
Ungeordnete Auswahl von k aus n Objekten ohne Wiederholung.

Binomialkoeffizient C(n,k)
$n! / (k! \cdot (n-k)!)$. Zählt die Anzahl der Kombinationen.

Merkregel: Wird nach Anordnungen oder Reihenfolgen gefragt, ist es eine Variation oder Permutation. Wird nach Auswahlen oder Teams gefragt, ist es eine Kombination.

Kombination ohne Wiederholung: $C(n,k) = n! / (k! \cdot (n-k)!)$

> Beispiel 1: Beim Skat werden 10 aus 32 Karten gezogen: $C(32,10) \approx 64{,}5$ Millionen Möglichkeiten.

> Beispiel 2: Jonas wählt 2 Sportarten aus 3 (Fußball, Schwimmen, Tennis), Reihenfolge egal: $C(3,2) = 3$ Möglichkeiten.

1.6 Additionssatz

Naiv würde man $P(A)+P(B)$ rechnen, aber dabei wird die Schnittmenge $A \cap B$ doppelt gezählt — deshalb muss sie einmal abgezogen werden.

Additionssatz
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$. Sind A und B disjunkt, vereinfacht sich das zu $P(A)+P(B)$.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

> Beispiel: 32 Skatkarten: $P(\text{Ass})=4/32$, $P(\text{Pik})=8/32$, $P(\text{Ass} \cap \text{Pik})=1/32$ (Pik-Ass). $P(\text{Ass} \cup \text{Pik}) = 4/32+8/32-1/32 = 11/32$.

1.7 Bedingte Wahrscheinlichkeit und Unabhängigkeit

Die bedingte Wahrscheinlichkeit $P(A|B)$ gibt an, wie wahrscheinlich A ist, wenn man bereits weiß, dass B eingetreten ist.

Bedingte Wahrscheinlichkeit
$P(A|B) = P(A \cap B) / P(B)$. Der Anteil von $A \cap B$ innerhalb von B.

Stochastische Unabhängigkeit
$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$, äquivalent zu $P(A|B) = P(A)$. Das Wissen um B verändert die Wahrscheinlichkeit von A nicht.

Multiplikationssatz
$P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B)$. Nützlich, wenn bedingte Wahrscheinlichkeiten bekannt sind, z. B. aus einem Wahrscheinlichkeitsbaum.

Achtung: Disjunktheit und Unabhängigkeit sind nicht dasselbe. Zwei Ereignisse mit positiver Wahrscheinlichkeit, die disjunkt sind, können nie unabhängig sein — wenn B eintritt, weiß man ja sofort, dass A nicht eingetreten ist.

$$P(A|B) = P(A \cap B) / P(B), \text{ sofern } P(B) > 0$$

> Beispiel: 40 Prozent Frauen, 25 Prozent aller Studierenden mit Auslandssemester, davon 60 Prozent Frauen. $P(A \cap F) = 0{,}6 \cdot 0{,}25 = 0{,}15$. $P(A|F) = 0{,}15/0{,}4 = 0{,}375$.

1.8 Totale Wahrscheinlichkeit und Satz von Bayes

Bilden B1 bis Bk eine vollständige Zerlegung von Ω, lässt sich P(A) aus den bedingten Wahrscheinlichkeiten $P(A|Bi)$ berechnen. Ein Wahrscheinlichkeitsbaum ist dafür die ideale Visualisierung.

Vollständige Zerlegung
B1,...,Bk sind paarweise disjunkt und decken zusammen ganz Ω ab.

Satz von Bayes
Berechnet $P(Bi|A)$ aus $P(A|Bi)$ und den Wahrscheinlichkeiten P(Bi).

Der Satz von Bayes kehrt die Bedingungsrichtung um: Man kennt $P(A|Bi)$, sucht aber $P(Bi|A)$ — diese beiden sind meist nicht gleich, ein sehr häufiger Denkfehler.

Klassisches Beispiel: medizinische Tests. Selbst ein Test mit hoher Sensitivität und Spezifität kann bei seltenen Krankheiten dazu führen, dass P(krank | positiv getestet) überraschend niedrig ausfällt, weil es viel mehr Gesunde gibt.

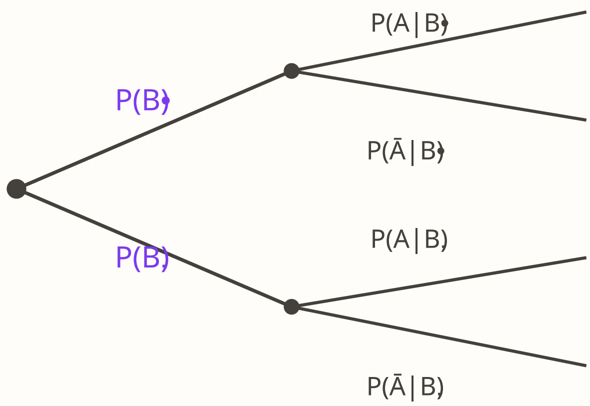

Abb. 1.2 — Wahrscheinlichkeitsbaum: jeder Pfad multipliziert die Wahrscheinlichkeiten entlang der Äste.

Totale Wahrscheinlichkeit: $P(A) = \Sigma\, P(A|B_i) \cdot P(B_i)$

Satz von Bayes: $P(B_i|A) = P(A|B_i) \cdot P(B_i) \,/\, \Sigma_j\, P(A|B_j) \cdot P(B_j)$

> Beispiel 1: Qualitätskontrolle eines Bauteils: Erkennungsrate für fehlerhafte Teile 94%, korrekte Erkennung intakter Teile 98%, 4% aller Teile sind tatsächlich fehlerhaft. P(als fehlerhaft erkannt) = 0,94·0,04+0,02·0,96 = 0,0568. P(fehlerhaft|erkannt) = 0,0376/0,0568 ≈ 0,66.

> Beispiel 2: Ein Vertriebler nimmt mit 40% Wahrscheinlichkeit das Flugzeug (dann pünktlich in 90% der Fälle) und sonst das Auto (dann pünktlich in 65% der Fälle). Er kam pünktlich an: P(Flugzeug|pünktlich) = 0,36/0,75 = 0,48.