



Lumo Skript

Mathematik 1: Semesterklausur — Aussagenlogik, Mengenlehre, Relationen, Abbildungen, Folgen, Reihen & Potenzreihen — Stoff der Semesterklausur (1. Prüfungsteil)

Erstellt für den persönlichen Gebrauch. Bitte nicht ohne Erlaubnis weiterverbreiten.

Kapitel 1: Aussagenlogik

Jede mathematische Theorie steht und fällt mit der Präzision ihrer Sprache. Bevor wir in Kapitel 2 über Mengen und später über Zahlen, Folgen und Reihen sprechen, brauchen wir deshalb ein Werkzeug, mit dem sich Behauptungen eindeutig formulieren und ihre Wahrheit lückenlos begründen lässt: die Aussagenlogik. Sie liefert das Vokabular für jeden Beweis, der in diesem Skript folgt.

1.1 Aussagen und Wahrheitswerte

Eine Aussage ist ein sprachliches Gebilde, dem eindeutig genau einer der Wahrheitswerte wahr (w) oder falsch (f) zugeordnet werden kann. 'Es regnet' ist umgangssprachlich keine Aussage in diesem Sinn (der Wahrheitswert hängt von Ort und Zeit ab), wohl aber '7 ist eine Primzahl' oder ' $2 + 2 = 5$ '.

Aussage

Ein sprachliches Gebilde, dem genau einer der Wahrheitswerte wahr oder falsch zugeordnet werden kann.

Wahrheitswert

Der Wert w (wahr) oder f (falsch), den eine Aussage annimmt.

Fragen, Befehle und Ausrufe sind keine Aussagen, da ihnen kein Wahrheitswert zukommt. Aus einfachen Aussagen lassen sich mit Hilfe von Junktoren komplexere Aussagen zusammensetzen — das ist der Gegenstand des nächsten Abschnitts.

Beispiel: '23 ist eine ungerade Zahl' ist eine wahre Aussage. 'Jede gerade Zahl größer als 2 ist eine Primzahl' ist eine falsche Aussage (Gegenbeispiel: 4).

1.2 Junktoren und Wahrheitstabellen

Aus Aussagen A, B werden mit Junktoren neue Aussagen gebildet: die Negation $\neg A$ ('nicht A'), die Konjunktion $A \wedge B$ ('A und B'), die Disjunktion $A \vee B$ ('A oder B', nicht ausschließend), die Implikation $A \Rightarrow B$ ('wenn A, dann B') und die Äquivalenz $A \Leftrightarrow B$ ('A genau dann, wenn B'). Der Wahrheitswert der zusammengesetzten Aussage hängt dabei ausschließlich von den Wahrheitswerten von A und B ab und lässt sich in einer Wahrheitstabelle vollständig auflisten.

Konjunktion $A \wedge B$

Wahr genau dann, wenn sowohl A als auch B wahr sind.

Disjunktion $A \vee B$

Wahr genau dann, wenn mindestens eine der beiden Aussagen A, B wahr ist (nicht-ausschließendes Oder).

Implikation $A \Rightarrow B$

Falsch genau dann, wenn A wahr und B falsch ist; in allen anderen Fällen wahr.

Besonders gewöhnungsbedürftig ist die Implikation: $A \Rightarrow B$ ist nur dann falsch, wenn A wahr und B falsch ist. Ist A bereits falsch, so ist $A \Rightarrow B$ automatisch wahr — unabhängig vom Wahrheitswert von B ('ex falso quodlibet').

Beispiel: 'Wenn 5 gerade ist, dann ist 3 eine Primzahl' ist als Implikation wahr, obwohl die Prämisse '5 ist gerade' falsch ist — die Implikation als Ganzes bewertet nur den Zusammenhang, nicht die einzelnen Bestandteile.

1.3 Äquivalenzumformungen: De Morgan und Kontraposition

Zwei zusammengesetzte Aussagen heißen logisch äquivalent, wenn sie unter jeder möglichen Belegung ihrer Bestandteile denselben Wahrheitswert annehmen — nachweisbar durch den Vergleich der vollständigen Wahrheitstabeln. Zwei Äquivalenzen werden in fast jedem Beweis dieses Skripts implizit verwendet.

Kontraposition

Die zu $A \Rightarrow B$ logisch äquivalente Aussage $\neg B \Rightarrow \neg A$; oft der einfachere Weg, eine Implikation zu beweisen.

Die Regeln von De Morgan übersetzen Negationen von Konjunktionen bzw. Disjunktionen: $\neg(A \wedge B) \hat{=} \neg A \vee \neg B$ und $\neg(A \vee B) \hat{=} \neg A \wedge \neg B$. Die Kontraposition liefert eine zur Implikation äquivalente, oft leichter zu zeigende Aussage: $A \Rightarrow B$ ist äquivalent zu $(\neg B) \Rightarrow (\neg A)$. Ein Beweis 'durch Kontraposition' nutzt genau diese Äquivalenz.

$$\neg(A \wedge B) \hat{=} \neg A \vee \neg B$$

$$\neg(A \vee B) \hat{=} \neg A \wedge \neg B$$

(A Ø) Ø-B ØA)